МАТЕРИАЛЫ
для ПОДГОТОВКИ
к ЕГЭ по МАТЕМАТИКЕ
на ПРОФИЛЬНОМ уровне.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

© А.Х. Назиев

Содержание

1 Тригонометрические функции **4**

1.1 Определения основных тригонометрических функций 4

1.2 Знаки значений тригонометрических функций . . . 6

1.3 Избранные значения тригонометрических функций 6

1.4 Графики тригонометрических функций 7

2 Основные тригонометрические формулы **9**

2.1 Основное тригонометрическое тождество 9

2.2 Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента 9

2.3 Формулы сложения 10

2.4 Формулы удвоения и утроения аргумента 11

2.5 Формулы понижения степени 12

2.6 Формулы раздвоения аргумента 13

2.7 Формулы преобразования произведений в суммы 14

2.8 Формулы преобразования сумм в произведения 15

2.9 Формулы приведения 15

2.10 О владении формулами тригонометрии 16

3 Преобразование тригонометрических выражений 18

3.1 Примеры с решениями 18

3.2 Тесты 23

3.2.1 Инструкции по выполнению тестов 23

3.2.2 Тест с выбором ответа 26

3.2.3 Тесты с записью краткого ответа 29

4 Решение тригонометрических уравнений 34

4.1 Решения простейших тригонометрических уравнений 34

4.2 Замена переменной 40

4.3 Разложение на множители 45

4.4 Тригонометрические уравнения с параметрами 48

5 Задачи 63

1. Тригонометрические функции

1.1. Определения основных тригонометрических функций

Угол в 1 *радиан* — это угол, который высекает на окружности радиуса 1 с центром в вершине угла дугу, длина которой равна единице.

Для любого действительного числа α через P_α обозначается точка единичной окружности, получаемая из точки $P(0,1)$ поворотом: на угол α радиан против часовой стрелки, если $\alpha \geq 0$; на угол $-\alpha$ радиан по часовой стрелке, если $\alpha < 0$.

Определение 1.1.

Косинусом числа α	называется	абсцисса точки P_α,
синусом числа α	называется	ордината точки P_α,
тангенсом числа α	называется	отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
котангенсом числа α	называется	отношение $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Определение 1.2.
Функция синус — это функция, определённая условием

$$y = \sin x,$$

функция косинус — это функция, определённая условием

$$y = \cos x,$$

функция тангенс — это функция, определённая условием

$$y = \operatorname{tg} x,$$

функция котангенс — это функция, определённая условием

$$y = \operatorname{ctg} x.$$

Области определения:

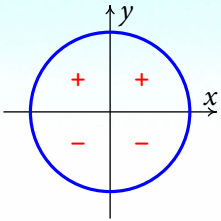
для функций косинус и синус — множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел,
для функции тангенс — множество всех действительных чисел x таких, что $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ при всех $k \in \mathbb{Z}$,
для функции котангенс — множество всех действительных чисел x таких, что $x \neq k\pi$ при всех $k \in \mathbb{Z}$.

Области значений:

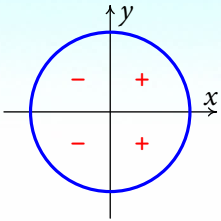
для функций косинус и синус — отрезок $[-1, 1]$,
для функций тангенс и котангенс — множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

1.2. Знаки значений тригонометрических функций

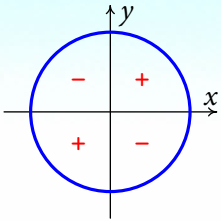
$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x$



1.3. Избранные значения тригонометрических функций

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
$\operatorname{ctg} x$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

1.4. Графики тригонометрических функций

Пример 1.1. Изобразите график функции

$$y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Первое решение. График функции $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ получается из графика функции $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ сжатием в два раза вдоль оси Ox к оси Oy.[1] А график функции $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ получается из графика функции $y = \cos x$ сдвигом вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{3}$ влево. Таким образом, график функции $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ получается из графика функции $y = \cos x$ в результате, 1), сдвига вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{3}$ влево и, 2), двукратного сжатия сдвинутого графика к оси Oy. Обозначив сдвиг на $\frac{\pi}{3}$ влево через „$\overset{\frac{\pi}{3}}{\leftarrow}$“, а двукратное сжатие к оси Oy — через „$\overset{2}{>\!<}$“, представим последовательность этапов построения графика схематически:

$$\boxed{y = \cos x} \overset{\frac{\pi}{3}}{\leftarrow\!\!\rightsquigarrow} \boxed{y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \overset{2}{>\!<\!\!\rightsquigarrow} \boxed{y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}.$$

[1] Пусть $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $g(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. Тогда $g(x) = f(2x)$.

Второе решение. При любом x

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

График функции $y=\cos 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ получается из графика функции $y=\cos 2x$ сдвигом вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{6}$ влево.[2] А график функции $y=\cos 2x$ получается из графика функции $y=\cos x$ сжатием в два раза вдоль оси Ox к оси Oy. Таким образом, график функции $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ получается из графика функции $y=\cos x$ в результате, 1), двукратного сжатия вдоль оси Ox к оси Oy и, 2), сдвига сжатого графика вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{6}$ влево. Схематически:

$$\boxed{y=\cos x}\ \overset{2}{\rightsquigarrow}\ \boxed{y=\cos 2x}\ \overset{\frac{\pi}{6}}{\leftsquigarrow}\ \boxed{y=\cos 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

(Раздел о графиках будет значительно расширен)

[2] Пусть $f(x)=\cos 2x$, $g(x)=\cos 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$. Тогда $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

2. Обзор основных формул тригонометрии

2.1. Основное тригонометрическое тождество

Для любого x

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

2.2. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

Для любого $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Для любого $x \neq k\pi$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Для любого $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\pi$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1.$$

Для любого $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Для любого $x \neq k\pi$

$$\operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

2.3. Формулы сложения

Для любых α, β

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}$$

Для любых α и β, если $\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, то

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + tg\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

а если $\alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, то

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - tg\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

2.4. Формулы удвоения и утроения аргумента

Для любого α

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha;\\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\
&= 2\cos^2\alpha - 1\\
&= 1 - 2\sin^2\alpha;\\
\sin 3\alpha &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;\\
\cos 3\alpha &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;
\end{aligned}$$

Если $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Если $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

2.5. Формулы понижения степени

Для любого α

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Если $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, то

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}.$$

Если $\alpha \neq k\pi$, то

$$\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}.$$

2.6. Формулы раздвоения аргумента

Для любого α

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},\qquad \text{так что}\qquad \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2},\qquad \text{так что}\qquad \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Если $\alpha\neq(2k+1)\pi$, то

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\qquad \text{так что}\qquad \left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Если $\alpha\neq 2k\pi$, то

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha},\qquad \text{так что}\qquad \left|\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

Для тангенса и котангенса половинного аргумента имеются ещё и другие формулы, не содержащие радикалов.

Если $\alpha\neq(2k+1)\pi$, то

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Если $\alpha \neq 2k\pi$, то

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

2.7. Формулы преобразования произведений в суммы

Для любых α и β

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)].$$

2.8. Формулы преобразования сумм в произведения

Для любых α и β

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

2.9. Формулы приведения

Формулами приведения называют соотношения, позволяющие выражать значения тригонометрических функций sin, cos, tg, ctg в точках $\alpha \pm n\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, через их значения в точке α. При этом, в силу того, что 2π является периодом для каждой из указанных функций, достаточно ограничиться значениями $n = 1,\ 2,\ 3$. Эти формулы мы представим в виде следующей таблицы.

x	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

2.10. О владении формулами тригонометрии

При изучении тригонометрии многих затрудняет необходимость запоминать большое количество формул. Для облегчения этой задачи нужно, прежде всего, самостоятельно вывести все необходимые формулы из основных — формул косинуса и синуса суммы и разности. После этого каждый раз, когда надо воспользоваться той или иной формулой, нужно не торопиться заглядывать в пособие, а постараться сначала представить себе, как может быть получена нужная формула, прикинуть в уме, как она устроена, и лишь после этого заглянуть в пособие и проверить себя.

Очень важно уметь читать формулы не только слева направо, но и справа налево. Например, нужно уметь не только разворачивать $\cos(\alpha+\beta)$ в $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, но и сворачивать второе из этих выражений в первое; в выражении $\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta$

нужно узнавать $\sin(\beta-\alpha)$ (а не $\sin(\alpha-\beta)$ и т.д.

Нужно учиться узнавать во встречающихся тригонометрических выражениях частные случаи левых и правых частей основных формул. Скажем, в

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$$

нужно видеть $\sin(x+\frac{\pi}{6})$, в $\sin x+\cos x$ узнавать

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right),$$

т.е. $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$, и т.д.

Но самое главное — это уметь *применять* формулы. Для этого очень важно понять, что в большинстве случаев встречающиеся выражения бывают „не готовы“ для применения известных формул, их ещё нужно к этому „подготавливать“.

3. Преобразование тригонометрических выражений

3.1. Примеры с решениями

Пример 3.1. Найдите значение выражения $5\cos^2 x + 1$, если $\sin^2 x = 0,3$.

1) 2,5; 2) 5,55; 3) 4,5; 4) 7,5.

Решение. Применяя основное тригонометрическое тождество, получаем

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - 0,3 = 0,7.$$

Отсюда $5\cos^2 x + 1 = 5 \cdot 0,7 + 1 = 4,5$.

Ответ. 3.

Пример 3.2. Найдите значение дроби $F = \dfrac{\sin 32^\circ \cos 28^\circ + \cos 32^\circ \sin 28^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$.

1) $\sqrt{3}$; 2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 3) $2\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. Применяя формулу синуса суммы и синуса двойного угла, получаем

$$F = \frac{\sin(32^\circ + 28^\circ)}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{2\sin 60^\circ}{2\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{2\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}.$$

Ответ. 3.

Пример 3.3. Найдите значение выражения $A = \cos(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha\sin\beta$, если $\alpha = 42^\circ$, $\beta = 18^\circ$.

1) $-0,5$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $0,5$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Применяя формулу косинуса разности и косинуса суммы, получаем

$$\begin{aligned} A &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \\ &= \cos(\alpha+\beta) = \cos(42^\circ + 18^\circ) = \\ &= \cos 60^\circ = 0,5. \end{aligned}$$

Ответ. 3.

Пример 3.4. Если $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$, то $81(\sin^3 x + \cos^3 x) = \ldots$.

Решение. Пусть $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$. Тогда

$$\begin{aligned} (\sin x + \cos x)^2 &= \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin x\cos x, \\ &= 1 + 2\sin x\cos x, \end{aligned}$$

откуда

$$2\sin x\cos x = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9},$$

так что $\sin x\cos x = -\frac{4}{9}$. Теперь

$$\begin{aligned} 81(\sin^3 x + \cos^3 x) &= 81(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x) \\ &= 81\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1 - (-\frac{4}{9})\right) \\ &= 81\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{9} \\ &= 39. \end{aligned}$$

Ответ. 39.

Пример 3.5. Вычислить $8\cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$.

Решение.

$$
\begin{aligned}
8\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ &= \frac{8\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} \\
&= \frac{4\cdot(2\sin 20^\circ \cos 20^\circ)\cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} \\
&= \frac{4\cdot \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} \\
&= \frac{2\cdot(2\sin 40^\circ \cos 40^\circ)\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} \\
&= \frac{2\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} \\
&= \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} \\
&= \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} \\
&= \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Ответ. 1.

Пример 3.6. Если $0 \leqslant x \leqslant \pi$, то $\arccos(-\cos x) = \ldots$.

Решение. Пусть $X = \arccos(-\cos x)$. Тогда $X \in [0,\ \pi]$ и $\cos X = -\cos x = \cos(\pi - x)$. При этом и $\pi - x \in [0,\ \pi]$ (почему?). Таким образом, оба числа, X и $\pi - x$, принадлежат отрезку $[0,\ \pi]$ и косинусы их равны. Но функция косинус на отрезке $[0,\ \pi]$ каждое своё значение принимает ровно один раз. Значит, $X = \pi - x$, то есть (при указанном условии!) $\arccos(-\cos x) = \pi - x$.

Ответ. $\pi - x$.

Пример 3.7. Если $\cos x = \frac{2}{\sqrt{13}}$ и $-\pi < x < 0$, то $13\sin 2x = \ldots$.

Решение. В силу формулы синуса двойного аргумента

$$13\sin 2x = 13 \cdot 2\sin x \cdot \cos x.$$

Здесь $\cos x$ известен. Найдём $\sin x$.

Из основного тригонометрического тождества, с учётом условия, получаем:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13}.$$

Извлекая из обеих частей этого равенства арифметический квадратный корень, получаем

$$\sqrt{\sin^2 x} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

В силу тождества $\sqrt{a^2} = |a|$ это означает, что

$$|\sin x| = \frac{3}{\sqrt{13}},$$

то есть что

$$\sin x = \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ или } \sin x = -\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

При этом $-\pi < x < 0$. Значит, $\sin x < 0$, то есть имеет место второе равенство: $\sin x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$. Таким образом,

$$13 \sin 2x = 13 \cdot 2 \cdot \frac{2}{13} \cdot \left(-\frac{3}{13}\right) = -12.$$

Ответ. -12.

3.2. Тесты

3.2.1. Инструкции по выполнению тестов

Приводимые ниже тесты делятся на тесты с выбором ответа и тесты с записью краткого ответа.

Чтобы приступить к выполнению теста, подведите указатель мыши к кнопке с надписью «Begin Quiz» и нажмите левую клавишу мыши. Закончив выполнение теста, подведите указатель мыши к кнопке с надписью «End Quiz» и нажмите левую клавишу

мыши. В окошке справа после слова «Score» будет показан Ваш результат, например, «8 out of 9», что означает: «8 заданий из 9 выполнены правильно». Затем подведите указатель мыши к кнопке с надписью «Correct» и нажмите левую клавишу мыши. Дальнейшие действия зависят от вида выполненного теста.

Если это был тест с выбором ответа, компьютер пометит зелёной «галочкой» Ваши правильные ответы, пометит красным косым крестом Ваши неправильные ответы и пометит зелёным «яблоком» правильный ответ.

Если выполненный Вами тест был с записью краткого ответа, после нажатия на кнопку «Correct» компьютер оставит чёрными рамки, в которые Вы внесли неправильные ответы и выкрасит в зелёный цвет рамки, в которые были внесены правильные ответы. При этом рядом с каждой рамкой ответа появится кнопка с надписью «Ans», нажав на которую, Вы сможете увидеть правильный ответ в рамке, помеченной «Answers».

Отвечая на задание теста с записью краткого ответа, подведите указатель мыши к рамке рядом с выполняемым заданием и нажмите левую клавишу мыши. В рамке начнёт мигать курсор и Вы сможете ввести полученный Вами ответ. Используйте при этом следующие обозначения.

- Используйте * для обозначения умножения: Пишите 4*x вме-

сто $4x$;

- Используйте ^ для обозначения степени: Пишите `4*x^3` вместо $4x^3$; `12*x^-6` вместо $12x^{-6}$.
- Заключайте в скобки аргументы вводимых функций ; например, пишите `sin(x)` вместо `sin x`.
- Используйте скобки для указания *границ* действия операций: Например, пишите `4*x*(x^2+1)^3` вместо $4x(x^2+1)^3$; `4^(2*x+1)` вместо 4^{2x+1}; `(sin(x))^2` вместо $(\sin(x))^2$. *НЕ* пишите `sin^2(x)`, пишите `(sin(x))^2`.
- Вы можете также пользоваться квадратными `[ ]` или фигурными `{ }`, скобками для ограничения выражений.
- Функции, которые Вы можете использовать:
  - Тригонометрические: `sin`, `cos`, `tan` (тангенс), `cot` (котангенс);
  - Обратные тригонометрические: `asin`, `acos`, `atan` (арксинус, арккосинус, арктангенс;
  - Логарифмические: `ln` (натуральный логарифм); например, `ln(x)`;

– Показательные: Показательная функция с основанием e, e^x, может быть введена как `exp(x)` или `e^x`.

– для обозначения модуля (абсолютного значения) используйте `abs(x)` или `|x|`.

– Прочие: `sqrt`, пишите `sqrt(x)` вместо $\sqrt{x}$ (или используйте «показательные» обозначения:`x^(1/2)`).

Важно: Вводя функции, используйте только те переменные, в которых сформулировано задание. Если в задании используется переменная x, пишите `x`; если в задании t, пишите `t`. Если Вы напишете `t` там, где от Вас ожидается `x`, ответ будет засчитан как неверный.

3.2.2. Тест с выбором ответа

СТАРТ!

1. Вычислите: $7\cos^2\alpha - 5 + 7\sin^2\alpha$.

(a) $1+\cos^2\alpha$; (b) 2;
(c) -12; (d) 12.

2. Упростите выражение $\cos x + \operatorname{tg} x \cdot \sin x$.

(a) 1; (b) $2\cos x$;
(c) $\cos x + \sin x$; (d) $\frac{1}{\cos x}$.

3. Упростите выражение $\cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

(a) $\cos 2x$; (b) $2\sin^2 x$; (c) $\cos^2 x$; (d) $\cos^4 x$.

4. Упростите выражение $-4\sin^2\alpha + 5 - 4\cos^2\alpha$.

(a) 1; (b) 9;
(c) $1 + 8\sin^2\alpha$; (d) $1 + 8\cos^2\alpha$.

5. Упростите выражение $\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \mathrm{tg}^2\alpha$.

(a) $\mathrm{ctg}\,2\alpha$; (b) 0;
(c) $\mathrm{ctg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha$; (d) $2\,\mathrm{tg}^2\alpha$.

6. Упростите выражение $1 - \sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

(a) 0; (b) $\sin^2\alpha$; (c) $\cos^2\alpha$; (d) $1 - \sin 2\alpha$.

7. Найдите $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{2\sqrt{7}}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$.

(a) $-\frac{3}{\sqrt{19}}$; (b) $-\frac{4}{\sqrt{19}}$; (c) $-\frac{\sqrt{19}}{4}$; (d) $-\frac{\sqrt{19}}{3}$.

8. Найдите значение выражения $14\sin^2 x - 3$, если $\cos^2 x = 0{,}7$.

(a) $-2,58$; (b) $1,2$; (c) 11; (d) $6,8$.

9. Найдите значение выражения $4\cos^2 x + 2$, если $\sin^2 x = 0,6$.

(a) $4,56$; (b) $1,2$; (c) $4,4$; (d) $3,6$.

10. Найдите значение выражения $2 - \mathrm{tg}^2 x \cdot \cos^2 x$, если $\sin x = 0,2$.

(a) $1,26$; (b) $1,96$; (c) $1,04$; (d) $1,6$.

11. Найдите значение выражения $3 + 2\,\mathrm{tg}^2 x \cdot \cos^2 x$, если $\sin x = 0,3$.

(a) $3,18$; (b) $3,6$; (c) $4,8$; (d) $4,82$.

12. Вычислите $\dfrac{6\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{2\cos^2 15^\circ - 1}$.

(a) $3\sqrt{3}$; (b) 3; (c) $1,5\sqrt{2}$; (d) $4\sqrt{3}$.

13. Вычислите $\dfrac{\cos^2 22,5^\circ - \sin^2 22,5^\circ}{\cos 25^\circ \cos 20^\circ - \sin 25^\circ \sin 20^\circ}$.

(a) 1; (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; (d) -1.

14. Найдите значение выражения $\sin(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha \sin\beta$, если $\alpha = 73^\circ$, $\beta = 28^\circ$.

(a) 1; (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (d) $\frac{1}{2}$.

15. Упростите выражение $1+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\sin x\cos x$, если $\alpha=73^\circ$, $\beta=28^\circ$.

(a) $\sin^2 x$; (b) $1+\sin^2 x$; (c) $\cos^2 x$; (d) $1+\cos^2 x$.

16. Упростите выражение $1-\frac{\sin 2\alpha\sin\alpha}{2\cos\alpha}$.

(a) $2\cos^2\alpha$; (b) $\sin^2\alpha$; (c) $\cos\alpha$; (d) $\cos^2\alpha$.

17. Упростите выражение $\cos^2(\pi-\alpha)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

(a) 1; (b) $2\cos^2\alpha$; (c) $2\sin^2\alpha$; (d) 0.

18. Упростите выражение $\sin 4\alpha\sin 6\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha\cos 6\alpha$.

(a) 0; (b) $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$;
(c) $2\cos 2\alpha$; (d) $\cos 2\alpha+\sin 10\alpha$.

19. Упростите выражение $\sin 3{,}5\alpha\sin 2{,}5\alpha+\cos\alpha-\cos 3{,}5\alpha\cos 2{,}5\alpha$.

(a) $\cos\alpha+\cos 6\alpha$; (b) 0;
(c) $2\cos\alpha$; (d) $\cos\alpha-\cos 6\alpha$.

ИТОГО: Проверка

3.2.3. Тесты с записью краткого ответа

СТАРТ!

1. Если $\cos(\alpha) = -0,1$, то
$5\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha =$

2. Если $\sin\alpha = -0,2$, то
$2\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha =$

3. Если $\sin\alpha = 0,5$, то
$5\sin(\pi+\alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) =$

4. Если $\cos\alpha = -0,9$, то
$4\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \cos(\pi-\alpha) =$

5. Если $\sin\alpha = \sqrt{\frac{5}{21}}$, и $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi$, то
$4\sqrt{21}\cos\alpha =$

6. Если $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{3}{19}}$ и $\pi \leqslant \alpha \leqslant \frac{3\pi}{2}$, то
$4\sqrt{19}\sin\alpha =$

7. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) =$

8. $\mathrm{tg}^2(\alpha-\pi) =$

ИТОГО: Проверка

Ответы:

СТАРТ!

1. Если $\cos x = -\frac{3}{5}$ и $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, то
$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) =$

2. Если $\sin x = \frac{4}{\sqrt{19}}$ и $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, то
$\sqrt{19}\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) =$

3. Если $\sin x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ и $-\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2}$, то
$26\sin 2x =$

4. Если $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ и $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, то
$17\sin 2x =$

5. $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

6. $\mathrm{tg}^2\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) =$

7. $\frac{4}{3}\,\mathrm{tg}\left(\pi - \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right) =$

8. $5\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{7}\right)\right) =$

ИТОГО: Проверка

Ответы:

СТАРТ!

1. Упростите выражение $2009 + \sin^4 x - \cos^4 x + \cos 2x$

2. Упростите выражение $3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 3(\sin^6 x + \cos^6 x)$

3. Если $2\cos 2x + 9\sin x - 4 = 0$, то
$8\cos 2x =$

4. Если $3\cos 2x + 11\sin x - 7 = 0$, то
$\cos 2x =$

5. Если $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$, то
$27\sin x\cos x =$

6. Если $\operatorname{tg} x = 3$, то
$\frac{2\sin 2x - 3\cos 2x}{4\sin 2x + 5\cos 2x} =$

7. $16\,\mathrm{ctg}\,110^\circ \sin 105^\circ\, \mathrm{tg}\,70^\circ \cos 105^\circ =$

8. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ =$

ИТОГО:

Проверка

Ответы:

4. Решение тригонометрических уравнений

4.1. Решения простейших тригонометрических уравнений

Для правильного решения тригонометрических уравнений нужно, прежде всего, твёрдо знать основные результаты о решении *простейших* тригонометрических уравнений:

$$\sin x = a,\ \cos x = a,\ \operatorname{tg} x = a,\ \operatorname{ctg} x = a.$$

Эти результаты сводятся к следующему.

1. Уравнение

$$\sin x = a \tag{1}$$

не имеет решений ни при одном a с $|a| > 1$ и имеет решения при любом a с $|a| \le 1$. Если $|a| \le 1$, то число x является решением уравнения (1.1) тогда и только тогда, когда оно представляется в виде $(-1)^n \arcsin a + n\pi$ с целым n, то есть когда существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $x = (-1)^n \arcsin a + n\pi$. Короче говоря:

если $|a| \le 1$, то, для любого действительного x,

$$\boxed{\sin x = a} \Leftrightarrow \boxed{\text{существует } n \in \mathbb{Z} \text{ такое, что} x = (-1)^n \arcsin a + n\pi.}$$

2. Уравнение

$$\cos x = a \tag{2}$$

не имеет решений ни при одном a с $|a| > 1$ и имеет решения при любом a с $|a| \le 1$. Если $|a| \le 1$, то число x является решением уравнения (1.2) тогда и только тогда, когда оно представляется в виде $\pm \arccos a + 2n\pi$ с целым n, то есть когда существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $x = \pm \arccos a + 2n\pi$. Короче говоря:

если $|a| \le 1$, то, для любого действительного x,

$$\boxed{\cos x = a} \Leftrightarrow \boxed{\text{существует } n \in \mathbb{Z} \text{ такое, что } x = \pm \arccos a + 2n\pi}.$$

3. Уравнение

$$\operatorname{tg} x = a \tag{3}$$

имеет решения при любом a. Число x является решением уравнения (1.3) тогда и только тогда, когда оно представляется в виде $\operatorname{arctg} a + n\pi$ с целым n, то есть когда существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $x = \operatorname{arctg} a + n\pi$. Короче говоря:

для любых действительных a и x,

$$\boxed{\operatorname{tg} x = a} \Leftrightarrow \boxed{\text{существует } n \in \mathbb{Z} \text{ такое, что } x = \operatorname{arctg} a + n\pi.}$$

4. Уравнение

$$\operatorname{ctg} x = a \tag{4}$$

имеет решения при любом a. Число x является решением уравнения (1.4) тогда и только тогда, когда оно представляется в виде $\operatorname{arcctg} a + n\pi$ с целым n, то есть когда существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $x = \operatorname{arcctg} a + n\pi$. Короче говоря:

для любых действительных a и x,

$$\boxed{\operatorname{ctg} x = a} \Leftrightarrow \boxed{\text{существует } n \in \mathbb{Z} \text{такое, что } x = \operatorname{arcctg} a + n\pi}.$$

5. Для отдельных значений a имеются специальные формулы, немного непохожие на приведённые, но на самом деле им эквивалентные:

$$\begin{aligned}
\sin x &= 0 &&\Leftrightarrow \text{ существует } n \in \mathbb{Z} \text{ такое, что } x = n\pi;\\
\sin x &= 1 &&\Leftrightarrow \text{ существует } n \in \mathbb{Z} \text{ такое, что } x = \tfrac{\pi}{2} + 2n\pi;\\
\sin x &= -1 &&\Leftrightarrow \text{ существует } n \in \mathbb{Z} \text{ такое, что } x = -\tfrac{\pi}{2} + n\pi;\\
\cos x &= 0 &&\Leftrightarrow \text{ существует } n \in \mathbb{Z} \text{ такое, что } x = \tfrac{\pi}{2} + n\pi;\\
\cos x &= 1 &&\Leftrightarrow \text{ существует } n \in \mathbb{Z} \text{ такое, что } x = 2n\pi;\\
\cos x &= -1 &&\Leftrightarrow \text{ существует } n \in \mathbb{Z} \text{ такое, что } x = \pi + 2n\pi;\\
\operatorname{tg} x &= 0 &&\Leftrightarrow \text{ существует } n \in \mathbb{Z} \text{ такое, что } x = n\pi;\\
\operatorname{ctg} x &= 0 &&\Leftrightarrow \text{ существует } n \in \mathbb{Z} \text{ такое, что } x = \tfrac{\pi}{2} + n\pi.
\end{aligned}$$

Все они легко усматриваются на „тригонометрическом круге“, однако для уяснения их связи с основными формулами (1–4) весьма

полезно не ограничиться этим и получить указанные формулы из основных. Рекомендуем Вам обязательно проделать это.

Решение остальных тригонометрических уравнений обычно стремятся свести к решению простейших. Для этого существуют различные приёмы, которые мы рассмотрим в следующих нескольких пунктах. Но прежде — важное

Замечание 4.1. Обратите внимание на слово „существует“ в приведённых выше ответах к простейшим тригонометрическим уравнениям. Обычно его опускают, записывая ответы короче, например — так:

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Великий американский писатель Уильям Фолкнер говорил (разумеется, по другому поводу), что опускать можно всё, что угодно, при условии, что Вы точно знаете, *что именно* Вы опускаете. К сожалению, школьников очень часто приучают „опускать подробности“, не объясняя им, что именно опускается. Потом некоторые из этих школьников становятся преподавателями математики и пишут безграмотные пособия для поступающих в вузы, наводнённые ошибками. Одно такое пособие вышло не так давно в весьма солидном издательстве и в нём (помимо массы других ошибок) неверно записаны ответы ко всем тригонометрическим

уравнениям. Например, в нём утверждается, что:

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + k\pi \ (\forall a \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}).$$

Там, где должно стоять „существует $k \in \mathbb{Z}$“, написано „$\forall k \in \mathbb{Z}$“ (что означает: „для любого $k \in \mathbb{Z}$“). *Это неверно.*

Действительно, пусть авторы правы, и равносильность

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + k\pi$$

выполняется не только при всех a, но и при всех k. Тогда имеют место и все равносильности, получаемые из неё при любых значениях переменных „a“ и „k“. В частности, при $a = 0$, $k = 2$ получаем:

$$(\operatorname{tg} x = 0) \Leftrightarrow (x = \operatorname{arctg} 0 + 2\pi),$$

т.е.

$$(\operatorname{tg} x = 0) \Leftrightarrow (x = 2\pi).$$

А беря $a = 0$, $k = 3$, точно так же получаем, что

$$(\operatorname{tg} x = 0) \Leftrightarrow (x = 3\pi).$$

Выходит,

$$(x = 2\pi) \Leftrightarrow (x = 3\pi),$$

откуда $2\pi = 3\pi$ и, значит, $2 = 3$. Предположив, что авторы правы, мы пришли к противоречию. Значит, они *не* правы, как и утверждалось.

Кое-кто думает, что дело здесь — в неправильном распределении областей действия указаний „$\forall a \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$“. А именно, говорят, приведённую формулировку следует понимать иначе: для любого $a \in \mathbb{R}$

$$(\operatorname{tg} x = a) \Leftrightarrow (x = \operatorname{arctg} a + k\pi \ (\forall k \in \mathbb{Z})).$$

Но и так — тоже неверно (не говоря уж о том, что это предъявляет чрезмерные требования к телепатическим способностям читателя). Беря опять $a = 0$, получаем:

$$(\operatorname{tg} x = 0) \Leftrightarrow (x = 0 + k\pi \ (\forall k \in \mathbb{Z})).$$

Это *неверно*. Действительно, при $x = 0$ получаем:

$$(\operatorname{tg} 0 = 0) \Leftrightarrow (0 = 0 + k\pi \ (\forall k \in \mathbb{Z})).$$

Левая часть этой равносильности говорит, что тангенс нуля равен нулю. Это верно. А правая часть говорит, что 0 равен $0 + k\pi$ *при всех* $k \in \mathbb{Z}$. Это — неверно. Значит, левая часть *не* равносильна правой. И так — не только при $a = 0$, так — *при всех* $a \in \mathbb{R}$.

Вы хотите знать, как — верно? Мы уже сказали об этом в пунктах 1–5. Внимательно изучите их ещё раз, вникая *в каждое* слово.

4.2. Замена переменной

Рассмотрение замен переменных начнём с примера.

Пример 4.1. Решить уравнение

$$2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0. \tag{5}$$

Решение. Уравнение (5) получается из уравнения

$$2y^2 - 5y - 3 = 0 \tag{6}$$

заменой в нём „y“ на „$\cos x$“. Решая уравнение (6), находим, что оно выполняется тогда и только тогда, когда $y = \frac{1}{2}$ или $y = -3$. Значит, уравнение (5) выполняется тогда и только тогда, когда $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -3$.

Первое имеет место в точности тогда, когда существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2n\pi$, то есть, когда существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$.

Второе не выполняется ни при каких x.

Далеко не всегда исходное уравнение бывает „готово“ для подобной замены. Тогда его нужно сначала „подготовить“ для этого.

Пример 4.2. Решить уравнение

$$2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0. \tag{7}$$

Решение. При всех x $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Поэтому уравнение (7) выполняется в точности тогда, когда и уравнение

$$2(1-\cos^2 x) + 5\cos x + 1 = 0,$$

или, что равносильно, уравнение

$$2 - 2\cos^2 x + 5\cos x + 1 = 0,$$

или ещё

$$2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0.$$

Получилось уравнение (5), удобное для замены.

Искусство решения уравнений (и неравенств) весьма существенно зависит от умения „делать вид“, то есть придавать решаемому уравнению вид какого-нибудь другого уравнения. Понятно, что обычно это может осуществляться многими способами, и далеко не все они одинаково хорошо способствуют решению исходного уравнения.

Пример 4.3. Решить уравнение

$$\cos^4 x = \cos 2x. \qquad (8)$$

Первое решение. При всех x $\cos^4 x = ((\cos^2 x)^2)$ и $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Поэтому уравнение (8) равносильно уравнению

$$\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \cos 2x,$$

или

$$\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \cos 2x,$$

или

$$1+2\cos 2x+\cos^2 2x = 4\cos 2x.$$

Последнее уравнение имеет вид

$$1+2y+y^2 = 4y$$

с $y = \cos 2x$.

Второе решение. При всех x $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Поэтому уравнение (8) равносильно уравнению

$$\cos^4 x = 2\cos^2 x - 1.$$

Последнее уравнение имеет вид

$$y^2 = 2y - 1$$

с $y = \cos^2 x$.

Пример 4.4. Решить уравнение

$$\cos x - \sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right| = 1. \qquad (9)$$

Решение. Поскольку, при всех x,

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},$$

уравнение (8) равносильно уравнению

$$\cos x - \sqrt{2\frac{1-\cos x}{2}} = 1, \qquad (10)$$

или

$$\cos x - \sqrt{1-\cos x} = 1. \qquad (11)$$

Полученное уравнение имеет вид

$$y - \sqrt{1-y} = 1. \qquad (12)$$

В заключение рассмотрим более громоздкий пример — не потому, что он обладает какой-либо особой поучительностью, а лишь для того, чтобы продемонстрировать, какие нагромождения порой встречаются на вступительных экзаменах, и показать, что все они вполне преодолимы, если не закрывать глаза от страха.

Пример 4.5. Решить уравнение

$$\sqrt{3+4\sqrt{6}-(16\sqrt{3}-8\sqrt{2})\cos x}=4\cos x-\sqrt{3}. \qquad (13)$$

Решение. Решаемое уравнение имеет вид

$$\sqrt{3+4\sqrt{6}-\left(16\sqrt{3}-8\sqrt{2}\right)y}=4y-\sqrt{3} \qquad (14)$$

с $y=\cos x$. Это уравнение в силу определения арифметического квадратного корня означает, что $4y-\sqrt{3}\geq 0$ и $\left(4y-\sqrt{3}\right)^2=3+4\sqrt{6}-\left(16\sqrt{3}-8\sqrt{2}\right)y$, т.е. что $y\geq\frac{\sqrt{3}}{4}$ и $4y^2+2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)y-\sqrt{6}=0$. Находим дискриминант D полученного квадратного уравнения:

$$\begin{aligned} D &= 4\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2-4\cdot 4\cdot\left(-\sqrt{6}\right)\\ &= 4\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+4\sqrt{3}\sqrt{2}\right)\\ &= 4\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2\\ &= \left(2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\right)^2. \end{aligned}$$

Значит, полученное нами уравнение выполняется в точности тогда, когда

$$y=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4} \text{ или } y=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4},$$

т.е. когда

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ или } y = \frac{-\sqrt{3}}{2}.$$

Учитывая условие $y \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$, видим, что уравнению удовлетворяет лишь $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Вспоминая, что $y = \cos x$, и решая уравнение $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, получаем

Ответ. Уравнение (13) выполняется в точности тогда, когда существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi$.

В заключение отметим, что авторы, придумавшие эту „бяку“, решали её более „дубово“.

4.3. Разложение на множители

Разложение на множители позволяет „расщепить“ решаемое уравнение на несколько более простых уравнений.

Пример 4.6. Решить уравнение

$$\sin 2x = \sin 4x. \tag{15}$$

Решение. Прежде всего,

$$\sin 2x = \sin 4x \Leftrightarrow \sin 2x - \sin 4x = 0.$$

А, кроме того, при всех x, $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$. В силу этого

$$\sin 2x = \sin 4x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x - 2\sin 2x\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x \cdot (1 - 2\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x = 0 \quad \text{или} \quad 1 - 2\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x = 0 \quad \text{или} \quad \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = k\pi \quad \text{или} \quad 2x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}k\pi \quad \text{или} \quad x = \pm\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}k\pi \quad \text{или} \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Ответ. $\sin 2x = \sin 4x$ в точности тогда, когда

$$x = \frac{1}{2}k\pi \text{ или } x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.7. Решить уравнение

$$2\cos 2x = \sqrt{6}(\cos x - \sin x). \qquad (16)$$

Решение.

$$2\cos 2x = \sqrt{6}(\cos x - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(\cos^2 x - \sin^2 x) - \sqrt{6}(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos x - \sin x)(2\cos x + 2\sin x - \sqrt{6}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x - \sin x = 0 \quad \text{или} \quad 2\cos x + 2\sin x - \sqrt{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0 \quad \text{или} \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Leftrightarrow$ существуют k и n в $\mathbb{Z}$ такие, что

$$\frac{\pi}{4} - x = k\pi \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{4} - x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + n\pi$$

$\Leftrightarrow$ существуют k и n в $\mathbb{Z}$ такие, что

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{4} - (-1)^n \frac{\pi}{3} + n\pi.$$

Пример 4.8. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \sqrt{6}\cos x = 3\cos^2 x + \sqrt{2}\sin x. \qquad (17)$$

Решение. Для любого x:

$$\sin^2 x + \sqrt{6}\cos x = 3\cos^2 x + \sqrt{2}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 x - 3\cos^2 x + \sqrt{6}\cos x - \sqrt{2}\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sin x + \sqrt{3}\cos x)(\sin x - \sqrt{3}\cos x) - \sqrt{2}(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sin x - \sqrt{3}\cos x)(\sin x + \sqrt{3}\cos x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \text{ или } \sin x + \sqrt{3}\cos x - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}\sin x - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0 \text{ или } \tfrac{1}{2}\sin x + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \tfrac{\pi}{6}\right) = 0 \text{ или } \sin\left(x + \tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x - \tfrac{\pi}{6} = k\pi \text{ или } x + \tfrac{\pi}{6} = (-1)^n \tfrac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{\pi}{6} + k\pi \text{ или } x = (-1)^n \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{6} + k\pi$$

4.4. Тригонометрические уравнения с параметрами

Пример 4.9. При каких значениях параметра a уравнения

$$\sin 2x + a = \sin x + 2a\cos x \text{ и } 2\cos 2x + a^2 = 5a\cos x - 2$$

равносильны?

Решение. Прежде всего,

$$\begin{aligned}
&\sin 2x + a = \sin x + 2a\cos x \\
\Leftrightarrow\ &\sin 2x - \sin x + a - 2\cos x = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\sin x(2\cos x - 1) - a(2\cos x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(2\cos x - 1)(\sin x - a) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(\sin x - a) = 0,
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&2\cos 2x + a^2 = 5a\cos x - 2 \\
\Leftrightarrow\ &4\cos^2 x - 2 + a^2 = 5a\cos x - 2 \\
\Leftrightarrow\ &4\cos^2 x - 5a\cos x + a^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(\cos x - a)(4\cos x - a) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(\cos x - a)\left(\cos x - \frac{a}{4}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, требуется выяснить, при каких значениях параметра a равносильны уравнения

$$\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(\sin x - a) = 0 \text{ и } (\cos x - a)\left(\cos x - \frac{a}{4}\right) = 0.$$

Пусть эти уравнения равносильны. Тогда, в частности, всякий раз, когда выполняется первое уравнение, выполняется и второе. Поскольку первое выполняется при $\cos x = \frac{1}{2}$, и второе в этом случае тоже выполняется, то есть справедливо равенство

$$\left(\frac{1}{2} - a\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{4}\right) = 0.$$

Последнее возможно лишь если $a = \frac{1}{2}$ или $a = 2$. Итак, если данные уравнения равносильны, то лишь при $a = \frac{1}{2}$ или $a = 2$. Выясним, при каких из этих a они действительно равносильны.

При $a = \frac{1}{2}$ исследуемые уравнения принимают вид

$$\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0 \text{ и } \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x - \frac{1}{8}\right).$$

Ясно, что эти уравнения не равносильны (второе выполняется, в первое не выполняется при $\cos x = \frac{1}{8}$).

При $a = 2$ уравнения принимают вид

$$\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(\sin x - 2) = 0 \text{ и } (\cos x - 2)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right).$$

Поскольку, при всех x, $\sin x - 2 \neq 0$ и $\cos x - 2 \neq 0$, каждое из уравнений равносильно уравнению $\cos x - \frac{1}{2} = 0$, и, значит, уравнения равносильны между собой.

Ответ. Данные уравнения равносильны при $a = 2$ и только при этом a.

Пример 4.10. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0 \qquad (18)$$

имеет единственное решение.

Решение. Функция

$$y = x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2$$

— чётная, поэтому вместе с каждым решением x уравнения (18) его решением является и $-x$. Поэтому, если уравнение (18) имеет хотя бы одно ненулевое решение, то это решение — не единственное. Значит, уравнение имеет единственное решение в точности тогда, когда 0 является его решением, а ни одно число, отличное от нуля, — не является.

0 является решением уравнения (18) в точности тогда, когда

$$-2a\sin 1 + a^2 = 0,$$

то есть когда

$$a = 0 \text{ или } a = 2\sin 1.$$

Выберем из этих a те, при которых 0 является *единственным* решением уравнения (18).

При $a = 0$ уравнение принимает вид

$$x^2 = 0$$

и очевидным образом имеет решением только 0.

Пусть $a = 2\sin 1$. Тогда уравнение принимает вид

$$x^2 - 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x) + 4\sin^2 1 = 0,$$

или, что эквивалентно,

$$x^2 + 4\sin 1 \cdot (\sin 1 - \sin(\cos x)) = 0. \qquad (19)$$

Ясно, что 0 является его решением. При этом, для любого x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, причём оба числа, -1 и 1, принадлежат промежутку $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, на котором синус возрастает. Значит, при любом x, $\sin(\cos x) \leqslant \sin 1$, так что $4\sin 1 \cdot (\sin 1 - \sin(\cos x)) \geqslant 0$. Отсюда ясно, что равенство (19), а вместе с ним, и (18), при $x \neq 0$ не выполняется.

Ответ. Уравнение имеет единственное решение в точности тогда, когда $a = 0$ или $a = \sin 1$.

Пример 4.11. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x^2-6|x|-a)^2+12(x^2-6|x|-a)+37=\cos\frac{12\pi}{a} \qquad (20)$$

имеет ровно два решения.

Решение. Прежде всего, при любых a и x

$$\begin{aligned} & (x^2-6|x|-a)^2+12(x^2-6|x|-a)^2+37= \\ = \quad & (x^2-6|x|-a)^2+12(x^2-6|x|-a)^2+36+1 \\ = \quad & (x^2-6|x|-a+6)^2+1, \end{aligned}$$

поэтому уравнение (20) равносильно уравнению

$$(x^2-6|x|-a+6)^2=\cos\frac{18\pi}{a}-1. \qquad (21)$$

Левая часть уравнения (21) неотрицательна, а правая — неположительна. Значит, равенство выполняется в точности тогда, когда обе они равны 0. Таким образом, уравнение (20) равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2-6|x|-a+6=0, \\ \cos\frac{18\pi}{a}=1. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет вид

$$t^2-6t-a+6=0 \qquad (22)$$

с $t = |x|$. Дискриминант уравнения (22) равен $4(a+3)$. При $a < -3$ оно не имеет корней, при $a = -3$ имеет единственный корень 3, при $a > -3$ — два корня, $3 - \sqrt{a+3}$ и $3 + \sqrt{a+3}$. Каждому положительному решению уравнения (22) отвечает два решения уравнения (20), нулевому — одно. Значит, чтобы уравнение (20) имело ровно два решения, нужно, чтобы уравнение (22) имело ровно один положительный корень и не имело нулевого корня. Это равносильно тому, что $a \geqslant -3$ и $3 - \sqrt{a+3} < 0$, т.е. что $a > 6$.

Второе уравнение выполняется в точности тогда, когда $\frac{18\pi}{a} = 2k\pi$, т.е. когда $a = \frac{9}{k}$ с $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Для таких a

$$a > 6 \Leftrightarrow \frac{9}{k} > 6 \Leftrightarrow \frac{9-6k}{k} > 0 \Leftrightarrow 0 < k < \frac{3}{2}.$$

Из целых k последнему условию удовлетворяет лишь $k = 1$.

Ответ. Уравнение (20) имеет ровно два решения в точности тогда, когда $a = 9$.

Пример 4.12. При каких значениях параметра a неравенство

$$|5\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + a + 1| \leqslant 6 \qquad (23)$$

выполняется при всех x?

Решение. При любых a и x неравенство (23) равносильно системе

$$-6 \leqslant 5\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + a + 1 \leqslant 6,$$

или

$$-7 - 5\sin^2 x \leqslant a(\sin 2x + 1) \leqslant 5 - 5\sin^2 x,$$

или

$$-7 - 5\sin^2 x \leqslant a(\sin 2x + 1) \leqslant 5\cos^2 x. \qquad (24)$$

При $\sin 2x + 1 = 0$ оба неравенства выполняются для любого a. Пусть $\sin 2x + 1 \neq 0$. Тогда система (24) равносильна системе

$$\frac{-7 - 5\sin^2 x}{\sin 2x + 1} \leqslant a \leqslant \frac{5\cos^2 x}{\sin 2x + 1}. \qquad (25)$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы найти все a, для которых система (25) выполняется при всех x.

Правая часть второго неравенства системы (25) неотрицательна и принимает значение 0 (например, при $x = \pi/2$). Поэтому второе неравенство выполняется при всех x в точности тогда, когда $a \leqslant 0$.

Рассмотрим левую часть первого неравенства и исследуем её на наибольшее значение. При всех x, для которых $\sin 2x + 1 \neq 0$,

$$\frac{-7 - 5\sin^2 x}{\sin 2x + 1} = \frac{-12\sin^2 x - 7\cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

Если $\cos x = 0$, то $\sin x \neq 0$, и

$$\frac{-12\sin^2 x - 7\cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{-12\sin^2 x}{(\sin x)^2} = -12.$$

Пусть $\cos x \neq 0$. Тогда

$$\frac{-12\sin^2 x - 7\cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{-12\,\mathrm{tg}^2 x - 7}{\mathrm{tg}\, x + 1)^2} = \frac{-12t^2 - 7}{(t+1)^2}$$

с $t = \mathrm{tg}\, x$. Рассмотрим функцию f, определённую условием

$$f(t) = \frac{-12t^2 - 7}{(t+1)^2},$$

и исследуем её на наибольшее значение.

При всех $t \in D(f)$

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{24t(t+1)^2 - (12t^2+7)2(t+1)}{(t+1)^4} \\ &= -\frac{24t(t+1) - 2(12t+7)}{(t+1)^3} \\ &= -\frac{24t-14}{(t+1)^3}, \end{aligned}$$

и, значит,

$$f'(t)=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=\tfrac{7}{12};$$

$$f'(t)>0 \quad \Leftrightarrow \quad -1<t<\tfrac{7}{12};$$

$$f'(t)<0 \quad \Leftrightarrow \quad t<-1 \text{ или } t>\tfrac{7}{12}.$$

На промежутке $(-\infty,-1)$ функция убывает и

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-\infty} f(t) &= \lim_{t\to-\infty}\frac{-12t^2-7}{(t+1)^2}\\ &= -\lim_{t\to-\infty}\frac{12+\frac{7}{t^2}}{(1+\frac{1}{t})^2}\\ &= -\frac{12+\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{7}{t^2}}{\lim\limits_{t\to-\infty}(1+\frac{1}{t})^2}\\ &= -12.\end{aligned}$$

Значит, $f(t)<-12$ при всех $t<-1$.

На промежутке $(-1,\frac{7}{12}]$ функция возрастает, а на промежутке $[\frac{7}{12},+\infty)$ — убывает. Значит, в точке $t=\frac{7}{12}$ она принимает значение, наибольшее на всём промежутке $(-1,+\infty)$. Это значение равно

$$-\frac{12\left(\frac{7}{12}\right)^2+7}{\left(\frac{7}{12}+1\right)^2}=-\frac{84}{19}=-4\frac{8}{19}.$$

А поскольку $-4\frac{8}{19} > -12 > f(t)$ при всех $t < -1$, это и есть наибольшее значение функции f.

Теперь,

$$\frac{-12\operatorname{tg}^2 x - 7}{(\operatorname{tg} x + 1)^2} = f(\operatorname{tg} x),$$

поэтому

$$\frac{-12\operatorname{tg}^2 x - 7}{(\operatorname{tg} x + 1)^2} \leqslant -4\frac{8}{19}$$

при всех x. Поскольку тангенс принимает все действительные значения, существует такое x, при котором $\operatorname{tg} x = \frac{7}{12}$. Значит, $-4\frac{8}{19}$ является наибольшим значением и для

$$\frac{-12\operatorname{tg}^2 x - 7}{(\operatorname{tg} x + 1)^2}.$$

Наконец,

$$\frac{-12\sin^2 x - 7\cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \begin{cases} -12, & \text{если } \cos x = 0; \\ \frac{-12\operatorname{tg}^2 x - 7}{(\operatorname{tg} x + 1)^2}, & \text{если } \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Значит, $-4\frac{8}{19}$ является наибольшим значением и для

$$\frac{-12\sin^2 x - 7\cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

Это показывает, что первое неравенство системы (25) выполняется при всех x в точности тогда, когда $a \geqslant -4\frac{8}{19}$.

Таким образом, система (25), а с нею — и неравенство (23), выполняется при всех x в точности тогда, когда $-4\frac{8}{19} \leqslant a \leqslant 0$. Это и есть *ответ*.

Пример 4.13. При каких a из промежутка $[-2, 1]$ расстояние на координатной прямой между любыми двумя различными решениями уравнения

$$\sin 2x + |2a+1|\sin x + |a| = 2|a|\cos x + \sin x + |2a^2 + a|$$

не меньше, чем $\frac{\pi}{2}$?

Решение. Прежде всего заметим, что предложенное уравнение равносильно следующим:

$$\sin 2x + (|2a+1| - 1)\sin x = 2|a|\cos x + |a|(|2a+1| - 1);$$
$$\sin x(2\cos x + |2a+1| - 1) = |a|(2\cos x + |2a+1| - 1);$$
$$(\sin x - |a|)(2\cos x - (1 - |2a+1|)) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно дизъюнкции

$$\sin x = |a| \quad \text{или} \quad \cos x = \frac{1 - |2a+1|}{2}.$$

Итак, нужно выяснить, при каких a из промежутка $[-2, 1]$ расстояние на координатной прямой между любыми двумя различными решениями этой дизъюнкции не меньше, чем $\frac{\pi}{2}$. На указанном промежутке естественно выделяются точки

$$-2; \quad -1; \quad -\frac{1}{2}; \quad 0; \quad 1.$$

Рассмотрим последовательно эти точки и промежутки между ними.

1) Пусть $a = -2$. Тогда первое уравнение решений не имеет, а второе принимает вид

$$\cos x = -1$$

и выполняется в точности тогда, когда $x = -\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Соседние решения здесь разведены на 2π, а остальные — ещё больше.

2) Пусть $-2 < a < -1$. Тогда первое уравнение по-прежнему не имеет решений, а второе выполняется в точности тогда, когда

$$\cos x = a + 1.$$

Это уравнение имеет две серии решений: $x_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, и $-x_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, где $x_0 = \arccos(a+1)$. Эти решения переплетены следующим образом:

$$\ldots,\ -x_0 - 2\pi,\ x_0 - 2\pi,\ -x_0,\ x_0,\ -x_0 + 2\pi, x_0 + 2\pi, -x_0 + 4\pi,\ \ldots$$

Поскольку $a < -1$, то $a+1 < 0$, значит, $x_0 > \frac{\pi}{2}$ и потому расстояние между $-x_0$ и x_0 больше чем π. А расстояние между x_0 и $-x_0+2\pi$ равно $2(\pi - x_0)$, что меньше $\frac{\pi}{2}$, если $\pi - x_0 < \frac{\pi}{4}$, т.е. если $x_0 > \frac{3\pi}{4}$, т.е. $a+1 < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $a < -1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, и, соответственно, не меньше чем $\frac{\pi}{2}$, если $a \geqslant -1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, на рассматриваемом промежутке $((-2;\,-1))$ требуемыми являются, в точности, все $a \in \left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$.

3) Пусть $a = -1$. Тогда дизъюнкция принимает вид $\sin x = 1$ или $\cos x = 0$ и имеет своими решениями числа $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющие требуемому условию.

4) Пусть $-1 < a \leqslant -\frac{1}{2}$. Тогда дизъюнкция принимает вид

$$\sin x = -a \quad \text{или} \quad \cos x = a+1.$$

Здесь $\frac{1}{2} \leqslant -a < 1$ и $0 < a+1 \leqslant \frac{1}{2}$. Поэтому оба уравнения имеют решения на промежутке $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, расстояние между которыми, понятно, меньше чем $\frac{\pi}{2}$.

5) Пусть $-\frac{1}{2} < a < 0$. Тогда дизъюнкция принимает вид

$$\sin x = -a \quad \text{или} \quad \cos x = -a.$$

Здесь $0 < -a < \frac{1}{2}$. Опять оба уравнения имеют решения на промежутке $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, и расстояние между ними меньше чем $\frac{\pi}{2}$.

6) Пусть $a = 0$. Тогда дизъюнкция принимает вид

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x = 0$$

и имеет своими решениями числа $k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющие требуемому условию.

7) Пусть $0 < a < 1$. Тогда дизъюнкция принимает вид

$$\sin x = a \quad \text{или} \quad \cos x = -a.$$

Здесь $-1 < -a < 1$. Поэтому оба уравнения имеют решения на промежутке $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$, расстояние между которыми, понятно, меньше чем $\frac{\pi}{2}$.

8) Пусть $a = 1$. Тогда дизъюнкция принимает вид

$$\sin x = 1 \quad \text{или} \quad \cos x = -1.$$

Её решения распадаются на две серии: $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, и $\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Расстояние между ближайшими равно $\frac{\pi}{2}$.

Ответ. При $a = -2$; $a \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -1\right]$; $a = 0$; $a = 1$.

5. Задачи

Решите уравнения:

1. $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\frac{5}{8}$;
2. $2\cos 2x=\sqrt{6}\left(\cos x-\sin x\right)$;
3. $2\left(\sin x+\cos x\right)^2=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$;
4. $1+\sin x+\cos x+\operatorname{tg} x=0$;
5. $12\sin^2 x+3\sin 2x-2\cos^2 x=2$;
6. $3\sin x-\cos x=1$;
7. $\sin 5x+\sin 7x=5\sin 6x$;
8. $\sin x\cdot\sin 7x=\sin 3x\cdot\sin 5x$;
9. $\cos x+\cos 3x=2$;
10. $\sin^{120} x-\cos^{120} x=1$;
11. $\sin^{120} x+\cos^{120} x=1$;
12. $\sin^{120} x-\cos^{119} x=1$;

13. При всех a решите уравнение

$$\frac{a^2 - \frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{tg}^2 x}{2\cos^2 3x} = \frac{a + 2\sin^2 2x}{\sin^2 6x + 2\cos 6x \cos^2 3x}.$$

(Примеры и упражнения будут добавлены)